

## Diamond Lemma.

**Diamond lemma.** Дан бесконечный ориентированный граф без ориентированных циклов и бесконечных путей. Известно, что если из вершины  $a$  ведут ребра в вершины  $b$  и  $c$ , то существует вершина  $d$ , достижимая и из  $b$ , и из  $c$ . Тогда для любой вершины графа найдется единственная достижимая вершина с нулевой исходящей степенью.

1. Докажите сформулированную лемму.
2. На доске выписаны положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . За ход разрешается взять любые два числа  $x$  и  $y$  и заменить их числом  $xy + x + y$ . Докажите, что итоговый результат не зависит от порядка действий.
3. В алфавите имеется  $n$  букв и  $n$  соответствующих им антибукв. Выписано слово этого алфавита. Каждую секунду из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и ее антибуква до тех пор, пока это возможно. Докажите, что результат не зависит от порядка действий.
4. На доске выписаны натуральные числа  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . За ход разрешается заменить любые два из них на их НОД и НОК. Докажите, что рано или поздно числа на доске перестанут меняться, а также что итоговый набор чисел не зависит от порядка действий.
5. В ряд стоит 100 коробок. В самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем в той, куда мы спичку добавили. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка действий.
6. Изначально у Ани и Бори было по длинной полосе бумаги. На одной из них была написана буква А, а на другой — буква Б. Каждую минуту один из них (не обязательно по очереди) приписывает к слову на своей бумажке слово с бумажки другого. Докажите, что через сутки слово с Аниной полоски можно будет разрезать на два палиндрома.
7. Программа на языке Вейль выглядит следующим образом: на входе — многочлен; операции, которые можно выполнять — дифференцирование, умножение на  $x$  (занимают по одной секунде), сложение двух многочленов и умножение на константу (мгновенные). Найдите минимальную степень многочлена  $P$  такого, что если две программы с временем действия не более 2018 секунд выдают одинаковые результаты на многочлене  $P$ , то они выдают одинаковые результаты на любом многочлене.