Лексикографический порядок

Пусть даны две последовательности натуральных чисел $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$. Скажем, что $A \succ B$ (*A лексикографически больше B*), если или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. Докажите, что
(a) если $A \succ B$, $B \succ C$, то $A \succ C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

2. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot \frac{(p-1)^k}{p}$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

3. Бизнесмен заключил с чертом соглашение: каждый день бизнесмен даёт черту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Другого источника купюр у бизнесмена нет, изначально у бизнесмена конечное число купюр. Докажите, что как бы бизнесмен не менял купюры, в какой-то момент он разорится .

4. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр **(a)** «1000», **(b)** «100 ... 0», где количество нулей произвольно и может меняться от шага к шагу. Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.

5. Участников некоторого экзамена рассадили по одному за парту в виде куба 10×10×10. Экзамен состоит из одной задачи. После первого часа экзамена некоторые учащиеся решили и записали данную задачу. Начиная с этого момента, каждую минуту один из учащихся либо списывает решение у соседа, либо обнаруживает дыру в уже написанном решении и зачеркивает его. Дежурный по аудитории пытается помешать списыванию, поэтому списать у соседа слева, сверху и сзади не выйдет. Известно, что каждое записанное решение когда-либо будет перечеркнуто. Докажите, что рано или поздно все учащиеся перечеркнут все решения в своих тетрадях.

6. Возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots$ такова, что среди простых делителей чисел $a_1, \dots, a_{100}$ встречаются
(a) только 2 и 5,
(b) только 2, 3 и 5,
а также при каждом натуральном $n > 100$ число a_n равно наименьшему натуральному числу, большему чем a_{n-1} и не делящемуся ни на одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.