

Принцип крайнего

1. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.
2. Алексей нарисовал на доске n прямых. Потом пришел еще один Алексей, посмотрел на доску и провел n прямых. Вскоре пришел Алексей (еще один) и провел ещё n прямых. Оказалось, что никакие три прямые не проходят через одну точку и никакие две прямые не параллельны. Докажите, что хотя бы одна из образовавшихся на доске частей будет треугольником.
3. На прямой расположены n отрезков так, что любые два отрезка имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
4. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что в этой стране есть город, от которого можно добраться до любого другого города, возможно с пересадками.
5. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.
6. В каждой вершине выпуклого 2021-угольника размещены жетоны, на каждом из которых написано целое число. Сумма всех чисел равна 1. Выбирают вершину и собирают жетоны, двигаясь по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел на собранных жетонах положительна. Докажите, что можно выбрать вершину так, чтобы, стартуя с неё, собрать все жетоны, причём такой выбор можно сделать единственным образом.

Принцип крайнего

1. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.
2. Алексей нарисовал на доске n прямых. Потом пришел еще один Алексей, посмотрел на доску и провел n прямых. Вскоре пришел Алексей (еще один) и провел ещё n прямых. Оказалось, что никакие три прямые не проходят через одну точку и никакие две прямые не параллельны. Докажите, что хотя бы одна из образовавшихся на доске частей будет треугольником.
3. На прямой расположены n отрезков так, что любые два отрезка имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
4. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что в этой стране есть город, от которого можно добраться до любого другого города, возможно с пересадками.
5. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.
6. В каждой вершине выпуклого 2021-угольника размещены жетоны, на каждом из которых написано целое число. Сумма всех чисел равна 1. Выбирают вершину и собирают жетоны, двигаясь по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел на собранных жетонах положительна. Докажите, что можно выбрать вершину так, чтобы, стартуя с неё, собрать все жетоны, причём такой выбор можно сделать единственным образом.