Треугольник Паскаля

1. Найдите значения выражений:
(a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$, **(b)** $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

2. Докажите, что $4^n \geqslant C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

3. Докажите, что для любого k каждое число n можно единственным образом представить в виде
$$n = C_{b_1}^1 + C_{b_2}^2 + ... + C_{b_k}^k,$$
где $0 \leqslant b_1 < b_2 < ... < b_k$. Считается, что $C_m^l = 0$ для $m < l$.

4. Пусть F_n — это n-е число Фибоначчи. Докажите, что
$$F_1C_n^1 + F_2C_n^2 + ... + F_nC_n^n = F_{2n}.$$

5. Докажите, что НОД $(C_{n-1}^{k-1}, C_n^{k+1}, C_{n+1}^k) =$ НОД$(C_{n-1}^k, C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k+1})$

6. По кругу стоит n целых чисел. Каждую секунду одновременно из каждого числа вычитают соседнее число, стоящее справа. Докажите, через некоторое время все числа будут делиться на n, если **(a)** n — простое, **(b)** n — степень простого.

[Кружок в Хамовниках, 8 класс] В. И. Ретинский,
[*2020-2021*] группа: 8 класс *24 апреля 2021 г.*

Треугольник Паскаля

1. Найдите значения выражений:
(a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$, **(b)** $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

2. Докажите, что $4^n \geqslant C_{2n}^n \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

3. Докажите, что для любого k каждое число n можно единственным образом представить в виде
$$n = C_{b_1}^1 + C_{b_2}^2 + ... + C_{b_k}^k,$$
где $0 \leqslant b_1 < b_2 < ... < b_k$. Считается, что $C_m^l = 0$ для $m < l$.

4. Пусть F_n — это n-е число Фибоначчи. Докажите, что
$$F_1C_n^1 + F_2C_n^2 + ... + F_nC_n^n = F_{2n}.$$

5. Докажите, что НОД $(C_{n-1}^{k-1}, C_n^{k+1}, C_{n+1}^k) =$ НОД$(C_{n-1}^k, C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k+1})$

6. По кругу стоит n целых чисел. Каждую секунду одновременно из каждого числа вычитают соседнее число, стоящее справа. Докажите, через некоторое время все числа будут делиться на n, если **(a)** n — простое, **(b)** n — степень простого.