

## Формула включения-исключения. Добавка

1. (a) Докажите тождество:

$$6xyz = (x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (x + z)^3 - (y + z)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$$

(b) Обобщите тождество на случай  $n$  переменных.

2. (a) На Новый год каждый из  $n$  сотрудников подготовил подарок и бросил его в мешок. Подарки перемешали, и каждый сотрудник вытянул один подарок. Сколько существует распределений подарков, в которых ни одному сотруднику не достался свой собственный подарок?

(b) На восьмое Марта каждый из  $m$  мальчиков подарил подарок одной из  $n$  девочек. Сколько существует распределений подарков, в котором ни одна девочка не осталось без подарка?

3. Введем функцию Мебиуса  $\mu(n)$ :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ является произведением четного количества различных простых чисел;} \\ 0, & n \text{ делится на квадрат простого числа;} \\ -1, & n \text{ является произведением нечетного количества различных простых чисел.} \end{cases}$$

(a) Петя выбрал натуральное  $n > 1$  и просуммировал  $\mu(d)$  по всем натуральным  $d$ , являющимися делителями числа  $n$ . Докажите, что у него получится 0.

(b) Обозначим через  $\sigma(d)$  сумму делителей числа  $n$ . Петя выбрал  $n$ , для каждого делителя  $d$  он выписал на доску  $\mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \sigma(d)$ , и нашел суммы выписанных чисел. Докажите, что у него снова получится  $n$ .