

Бесконечные слова

Слово Туэ

Будем строить последовательность слов, состоящих из букв А и В, по следующему правилу: $T_0 = A$ и $T_{n+1} = T_n + \bar{T}_n$, где \bar{T}_n – это слово, в котором все буквы А заменили на В и наоборот, а под сложением подразумевается приписывание второго слова справа от первого. Таким образом,

$$T_1 = AB,$$

$$T_2 = ABBA,$$

$$T_3 = ABBAABAAB,$$

...

Полученное таким образом бесконечное слово $T = ABBAABAABBAABAABBA \dots$ называется словом Туэ.

- (а) Докажите, что если в слове Туэ зачеркнуть все буквы, стоящие на четных позициях, то оставшееся слово также является словом Туэ.

(б) Петя взял пустую полоску бумаги и раз в минуту дописывает справа две буквы. При этом если на n -м месте слова Туэ стоит А, то Петя на n -й минуте дописывает АВ, иначе на n -й минуте он дописывает ВА. Докажите, что Петя выписывает слово Туэ.
- Докажите, что на k -м месте слово Туэ стоит А тогда и только тогда, когда в двоичной записи числа $k - 1$ четное число единиц.
- Вася разбил набор чисел $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ на два множества: в первом множестве встречаются только те k , для которых на k -ом месте слова Туэ стоит А, оставшиеся числа находятся во втором.

(а) Докажите, что наборы попарных сумм этих двух множеств совпадают. Иначе говоря, количества способов представить любое натуральное число суммой двух различных чисел из первого подмножества и суммой двух различных чисел из второго подмножества равны.

(б) Докажите, что для любого $0 \leq m < n$ суммы m -х степеней чисел в первом и во втором наборах совпадают.
- Докажите, что слово Туэ не является периодичным (даже с предпериодом).

Слово Фибоначчи

Теперь будем рассматривать следующую последовательность слов: $S_0 = A$, $S_1 = AB$, $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$. Таким образом,

$$S_2 = ABA$$

$$S_3 = ABAAB$$

$$S_4 = ABAABABA$$

...

Полученное таким образом бесконечное слово $S = ABAABABAABAAB \dots$ называется *словом Фибоначчи*.

- (a)** Докажите, что слово $S_n + S_{n-1}$ отличается от слова $S_{n-1} + S_n$ лишь в двух последних буквах.

(b) Докажите, что если из S_n удалить две последние буквы, то получится палиндром.
- Теперь Петя взял пустую полоску бумаги, и если на n -м месте слова Фибоначчи стоит A , то он на n -й минуте дописывает справа AB , а иначе он дописывает просто A . Докажите, что Петя выписывает слово Фибоначчи.
- Докажите, что слово Фибоначчи не является периодичным (даже с предпериодом).