

Набор попарных сумм

Пусть дан набор из n чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда *набором попарных сумм* называется $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ чисел вида $a_i + a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$.

1. Петя задумал **(а)** 3 **(б)** 5 рациональных чисел и сказал в некотором порядке Васе набор попарных сумм. Докажите, что Вася может восстановить, какие числа задумал Петя.
2. Докажите, что по набору попарных сумм набора из 6 чисел можно восстановить сумму **(а)** квадратов **(б)** кубов исходных 6 чисел.
3. **(а)** Приведите пример двух наборов из четырех чисел, у которых совпадают наборы попарных сумм.
(б) Пусть $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$ — набор попарных сумм некоторого набора из четырех чисел. Докажите, что существует еще один набор из четырех чисел с тем же набором попарных сумм.
4. Докажите, что для $n = 2^k$ существует 2 набора по n чисел в каждом, наборы попарных сумм которых совпадают.
5. Докажите, что для набора n различных чисел a_1, \dots, a_n количество различных сумм вида $a_i + a_j$, где $(i < j)$,
(а) не менее $2n - 3$.
(б) может быть любым числом из диапазона $[2n - 3, \frac{n(n-1)}{2}]$