

Метод перераспределения зарядов

1. Каждый мальчик принес на 8 марта по килограмму конфет и раздал их поровну всем своим знакомым девочкам. Докажите, что если у каждой девочки друзей не меньше, чем у каждого знакомого ей мальчика, то каждая девочка получит не менее килограмма конфет.
2. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой клетки со звездочкой количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.
3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.
4. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф — не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них — соперников-гномов. Докажите, что $D \leq \frac{10}{11}E$.
5. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.
6. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).
7. Пусть есть выпуклый n -угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[(n-1)/2]} \right).$$