Характеристика коллектива — это не совокупонсть индивидуальных характеристик.

В прошедшей неделю назад игре вы несколько раз разбивались на команды. И в результате личный рейтинг каждого участника команды в этом раунде был равен результаты команды в этом раунде. То есть неявно считалось, что любой командный результат обеспечивается равным вкладом всех участников. Вообще это предположение минимум спорное. Некоторые считают, что неопытная команда решает хуже, чем сильнейший её участник. Сегодня мы рассмотрим несколько сюжетов, связанных с синергетическим эффектов групп людей. Мы снова проверяем, как вы читаете длинные вступления, поэтому когда придёте что-то сдавать, расскажите нам, что такое объединение множеств, а если не знаете этого, то спросите первым делом у преподавателя, но не спрашивайте вслух на всю аудиторию.

Сыгранные команды.

1. На игру пришло 20 человек. Некоторые команды из пяти человек сыгранные, некоторые — нет. Могло ли оказаться, что при любом разбиении учеников на четыре команды по 5 человек
а) ровно одна команда будет сыгранной;
б) ровно три команды будут сыгранными;
в) либо ноль, либо четыре команды будут сыгранными, причём оба варианта бывают;
г) **(Артём Ринатович, привет!)** либо одна, либо три команды будут сыгранными, причём оба варианта бывают?

2. Назовём четвёрку людей *перспективной*, если к ним можно добавить кого-то, чтобы получилась сыгранная команда. Назовём человека *универсальным*, если его добавление к любой перспективной четвёрке делает команду сыгранной. Известно, что сыгранные команды есть. Обязательно ли пятеро универсальных людей образуют сыгранную команду?

3. Злой Владимир Алексеевич посмотрел на всех присутсвующих на кружке и понял, что универсальных среди 27 пришедщих нет. Могло ли оказаться так, чтобы после того, как он выгнал одного из учащихся, все остальные оказались универсальными?

Успешные стартапы.

В следующей части задач будем рассматривать такую модель. Есть компания людей, назовём их $a_1, a_2, \dots a_n$. Про каждое подмножество из них известно, сколько прибыли оно генерирует. Таким образом известна некоторая функция f, которая каждому подмножеству сопоставляет неотрицательное число.

Будем от функции f требовать условие $f(A \cup B) \geqslant f(A) + f(B)$ для любых непересекающихся подмножеств A и B.

4. Рассмотрим случай, когда есть всего 3 человека, а f принимает значения только 0 или 1. Сколько таких разных функций f можно придумать?

Наша цель — по функции f определить, как распределять прибыль, а именно $f(\{a_1, a_2, \dots a_n\})$, между людьми. Вопрос не совсем математический, почему для принятия решения нужно учитывать сколько зарабатывают подмножества людей, а не только вся компания вместе.

От принципа распределения прибыли будем требовать три свойства:
• **Ш1:** равнозначные люди получают поровну.
• **Ш2:** человек, который не меняет прибыль при добавлении к любому подмножеству, не получает ничего.
• **Ш3:** если человек от функции f заработает сумму x, а от функции g заработает сумму y, то от функции $a \cdot f + b \cdot g$ он заработает сумму $ax + by$.

Теорема (Шепли). Свойств Ш1-Ш3 достаточно, чтобы распределения общей прибыли восстанавливалось однозначно.

5. Рассмотрим какое-нибудь подмножество людей S. Обозначим f_S такую функцию заработка: все подножества, которые целиком содержат людей из S зарабатывают 1, все остальные коллективы зарабатывают 0. Как распределить итоговую единицу между людьми?

6. Функция прибыли такова, что $f(\{a\}) = 3$, $f(\{b\}) = 8$, $f(\{c\}) = 9$, $f(\{a,b\}) = 25$, $f(\{a,c\}) = 24$, $f(\{b,c\}) = 18$, $f(\{a,b,c\} = 40$. Представьте её в виде суммы нескольких f_S из прошлой задачи и выясните, как распределять суммарную прибыль в 40 между тремя ребятами.

7. а) Докажите, что для произвольного количества людей любую функцию прибыли можно представить в виде линейной комбинации различных f_S.
б) Докажите, что это представление единственное.
в) Докажите теорему Шепли.

8. Покажем другой способ распределять итоговую прибыль. Будем в каком-то порядке добавлять людей к рабочей группе и смотреть, на сколько они увеличивают прибыль. Например если в задаче 6 сначала добавлять a, потом b, потом c, то a принесёт 3, b — 22, c — 15. А если добавлять сначала c, затем b, затем a, то c принесёт 9, b — тоже 9, а a — 22.
Для каждого человека при всех возможных порядках людей посчитаем среднее арифметическое увеличения прибыли. Докажите, что получившаяся величина совпадает с тем, что теорема Шепли велит выдавать работнику.

9. Среди n человек один менеджер, а остальные разработчики. Разработчики без менеджера не зарабатывают ничего, а менеджер вместе с k разработчиками зарабатывает k^2 миллиардов долларов. Как распределить $(n-1)^2$ миллиардов долларов между ними?