

Вступительная олимпиада

Задача 1. На круглом торте расположены 3 красных и 300 жёлтых точечных розочек, причём никакие три розочки не лежат на одной прямой. Обязательно ли можно отрезать прямолинейным разрезом кусок, в котором окажется одна жёлтая розочка и больше никаких других? Розочки считаем точками.

Задача 2. Известно, что среди 63 монет 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты также весят одинаково, фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Задача 3. По кругу стоят натуральные числа, причём каждое равно либо сумме, либо модулю разности двух своих соседей. Оказалось, что сумма всех чисел равна 123456789. Докажите, что количество чисел делится на 3.

Задача 4. По кругу написано 26 чисел. С любого места этого круга можно запустить робота, который будет обходить числа по часовой стрелке и считать сумму первого встретившегося ему числа, второго, умноженного на два, третьего, умноженного на три, и так далее, и последнего числа, умноженного на 26. Оказалось, что если запустить робота с какого-то числа, получится 2020, если со следующего по часовой стрелке, то 2019, если ещё со следующего, то 2018 и так далее, то есть каждый раз при смещении стартовой позиции на 1, результат тоже будет уменьшаться на 1.

Таким образом, если запускать робота с разных мест по часовой стрелке, будут получаться числа 2020, 2019, 2018, ..., 1995. А какие числа будут получаться, если запускать робота с разных мест против часовой стрелки?

Задача 5. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2021, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2021.

Задача 6. В клетки квадрата $n \times n$ встали по одному человеку, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый человек произнёс фразу «лжецов в одной строке со мной больше, чем лжецов в одном столбце со мной». Докажите, что количество лжецов среди этих людей делится на n .