Графы. Длинные пути и циклы.

Ищем гамильтоновы пути и циклы

Определение. Гамильтонов путь (или цикл) – это путь (или цикл), проходящий по каждой вершине графа ровно 1 раз.

Про произвольный граф бывает очень сложно понять, есть ли в нём гамильтонов путь или гамильтонов цикл. Но иногда это понять можно!

1. В графе n вершин, степень любой из них хотя бы $\frac{2n}{3}$.

(a) Докажите, что в графе есть цикл длины, большей $\frac{2n}{3}$.

(b) Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

2. В графе n вершин, степени вершин A и B равны a и b, соответственно. Известно, что $a + b \geqslant n$.

(a) Вершины A и B соединили ребром, и в графе нашёлся гамильтонов цикл. Докажите, что изначально в графе тоже был гамильтонов цикл.

(b) Вершины A и B соединили ребром, и в графе нашёлся гамильтонов путь. Докажите, что изначально в графе тоже был гамильтонов путь.

В следующих задачах можно пользоваться задачей 2 без доказательства.

3. В графе n вершин, степень любой из них хотя бы $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

4. В графе n вершин, их степени равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Оказалось, что $a_1 + a_n \geqslant n$, $a_2 + a_{n-1} \geqslant n$ и так далее (для каждого k выполнено $a_k + a_{n+1-k} \geqslant n$). Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

5. В графе n вершин. Оказалось, что для каждого $k < \frac{n}{2}$ в графе менее k вершин степени не более k (в частности, нет вершин степени 1, не более одной вершины степени 2, не более двух вершин степеней 2 и 3 и т.д.). Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

6. Дано натуральное число n. В графе $2n+1$ вершина: $n+1$ вершина степени n и n вершин степени $2n$. Обязательно ли в таком графе есть гамильтонов цикл?

Решаем задачи про гамильтоновы пути и циклы

7. В графе покрасили в красный цвет все вершины чётной степени. Также в графе выбрали вершину A. Докажите, что количество гамильтоновых путей, начинающихся в вершине A и заканчивающихся в какой-нибудь красной вершине, чётно.

Указание: Постройте граф, вершины которого – это гамильтоновы пути, начинающиеся в A. Ребро проводится между путями, если они отличаются заменой одного ребра.

8. Все вершины графа имеют степень 3. Саша нашёл в этом графе гамильтонов цикл, проходящий через ребро AB. Докажите, что Саша сможет найти ещё один гамильтонов цикл, проходящий через ребро AB.

9. Ребра полного графа на $2n+1$ вершине раскрасили в красный и синий цвета. Известно, что красных рёбер a, синих рёбер b и $|a-b| \leqslant 2n$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь, в котором поровну синих и красных рёбер.

10. Ребра полного графа на n вершинах покрашены в черный и белый цвета. Докажите, что вершины графа можно разбить на две группы, удовлетворяющие следующим условиям:

(a) в первой группе существует путь по ребрам белого цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз, а во второй группе есть путь по ребрам черного цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

(b) в первой группе существует путь по ребрам белого цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз, а во второй группе есть цикл из ребер черного цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

В любой из групп допускается наличие ровно одной вершины.