Серия 14. Задачи из олимпиад Эйлера и сюжеты по их мотивам.

1. Существуют ли такие 10 натуральных чисел, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трёх из них на неё делится?

2. Существуют ли такие 100 а) не обязательно различных; б) различных натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному?

3. Назовём число *египетским*, если его можно представить в виде $1/n$ для некоторого натурального n. Существует ли арифметическая прогрессия длины 100 из египетстких чисел?

4. На клетчатой белой доске размером 25×25 клеток несколько клеток окрашено в чёрный цвет, причём в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно 9 клеток. При каком наименьшем k заведомо можно перекрасить k клеток в белый цвет таким образом, чтобы нельзя было вырезать чёрный квадрат 2×2?

5. В таблице $2n \times 2n$ закрасили в чёрный цвет k клеток. При каком наибольшем k все чёрные клетки можно гарантированно покрыть n строками и n столбцами?

6. Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?

7. Дана окружность длины 91. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 90?

8. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка E. Известно, что сумма углов BAE и BCE равна углу ABC. Докажите, что $AE + EC > AB$.

9. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC. Докажите, что $\angle MBN = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $\angle ABC = 90^\circ$.