Преобразования.

Задача 1. (на ответ)
Известно, что число x целое, а число $x^2 - 81$ – простое. Найдите наибольшее возможное значение x.

Задача 2. (На ответ) Сумма двух чисел равна 3, а сумма их обратных величин равна 2. Чему равна сумма квадратов этих чисел?

Задача 3. (на ответ)
Число a таково, что $1 + a = a^2$. Найдите значение выражения $a^4 - 3a$.

Задача 4. (на ответ)
Оля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 70, 110, 120, 180 и 230. Чему равна шестая сумма?

Задача 5. (на ответ)
Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель чисел $n^2 + 20$ и $(n+1)^2 + 20$ для натуральных n?

Задача 6. (на ответ)
Для каждого натурального n обозначим u_n наибольшее простое число, не превосходящее n, а v_n — наименьшее простое число, большее n. Вычислите

$$\frac{1}{u_2 v_2} + \frac{1}{u_3 v_3} + \ldots + \frac{1}{u_{100} v_{100}}.$$

Задача 7.
Квадрат со стороной 2 разбит вертикальными и горизонтальными прямыми на прямоугольники, раскрашенные в черный и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что если суммарные площади черных и белых прямоугольников равны, то из черных прямоугольников можно составить прямоугольник 1×2.

Задача 8.
Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по семь из этих чисел, а Вася —- все возможные суммы по восемь из этих чисел. Могло ли так случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? *(Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)*

Задача 9.
В клетках квадрата $n \times n$ расставлены числа от 1 до n^2 так, что каждое число присутствует ровно 1 раз. Егор может выбрать n клеток, чтобы никакие две не лежат в одном столбце или в одной строке и посчитать сумму чисел на этих клетках. Егор хочет сделать эту сумму как можно больше. На какую наибольшую сумму можно рассчитывать?

Задача 10.
Произведение трёх чисел равно 1, а их сумма равна сумме обратных к ним чисел. Докажите, что одно из чисел равно 1.

Задача 11.
Петя написал на доске попарно различные целые числа a, b, c, d, причём $|a|, |b|, |c|, |d| > 100$. Известно, что наибольшее натуральное число, на которое делятся все четыре числа — это 1. Витя записал на доске числа $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$. Таня разбила Витины числа на три пары и перемножила числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?