

Теория чисел

Задача 1. Сумма цифр натурального числа A равна 100, а сумма цифр числа $5A$ равна 59. Сколько нечетных цифр в десятичной записи числа A ?

Задача 2. Найдите все возможные четвёрки натуральных чисел (a, b, c, n) такие, что $2^n = a! + b! + c!$.

Задача 3. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любого натурального k сумма любых k подряд идущих членов этой последовательности делится на $k + 1$?

Задача 4. Обозначим как $\sigma(k)$ наибольший нечётный делитель числа k . Докажите, что $\sigma(n + 1) + \sigma(n + 2) + \sigma(n + 3) + \dots + \sigma(2n) = n^2$.

Задача 5. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

Задача 6. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

Задача 7. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$, где a, b, c — попарно взаимно простые натуральные числа.