Снова неравенства, но теперь с другой стороны

1. На экране компьютера записано число $2021,22$. Каждую минуту оно увеличивается. Обязательно ли когда-то оно станет больше $2022,21$?

2. Тому Сойеру сказали покрасить забор длины 50 метров. За первый час он покрасил 1 метр, устроил перерыв, а в каждый следующий час красил $\frac{1}{\ell^5}$, где ℓ — длина покрашенной до последнего перерыва части. Докрасит ли он забор?

3. Один конец метровой резинки привязан к столбу, другой конец тянет Супермен. Каждую минуту он удлинняет резинку на один метр. По резинке ползёт букашка со скоростью один сантиметр в минуту. Доползёт ли она до Супермена?

4. Напомним, что $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (количество способов выбрать k элементов из n). Здесь $0! = 1$, а значит, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
(a) Проверьте, что $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
(b) **Бином Ньютона.** Пользуясь методом математической индукции докажите, что $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.
(c) Подставив удачные a и b докажите, что $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.
(d) Так же докажите, что $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.
Вам может показаться, что бином Ньютона здесь не в тему, но вообще-то немного в тему.

5. Докажите, что для каких-то n выполнено неравенство:
(a) $n^2 > 2020n + 10^5$;
(b) $n^{101} > 100n^{100} + 99n^{99} + 98n^{98} + \ldots + 2n^2 + n + 2021$;
(c) $\binom{n}{k} > n^{k-1}$;
(d) $1,01^n > 2021^{2021}$;
(e) $1,01^n > 2021n + 2021$;
(f) $1,01^n > n^{20} + 21$.

6. Натуральное $n \geqslant 3$. Что больше: n^{n+1} или $(n+1)^n$?

7. При каком натуральном n значение выражения $\sqrt[n]{n}$ максимально?
Что вам надо знать про корень n-ной степени в этой задаче. Да только одно: $\sqrt[n]{a}$ — это такое неотрицательное число, которое при возведении в степень n равно a.

8. Дано натуральное число n. При каком натуральном k значение выражения $\binom{n}{k}$ максимально?

9. Докажите неравенство $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$.

10. Для каких n выполнено неравенство $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$?

11. В ряд стоит n роботов. Управляющему нужно уметь строить их в любом порядке. Для этого он отправляет каждому роботу какую-то команду. Каждая команда — это последовательность из 256 нулей и единиц. После получения команд, роботы должны как-то перестроиться. Верно ли, что для любого n управляющий может так запрограммировать роботов реагировать на команды, чтобы они смогли построиться любым образом?