Кружок в “Хамовниках”. 2020-2021 учебный год. 7 класс.

Неравенства

1. Что больше: $20!^{21!}$ или $21!^{20!}$?

2. Числа m и n – натуральные. Докажите, что $\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \cdot \frac{n!}{n^n}$

3. Даны различные простые числа p и q. Натуральные числа m и n таковы, что число $\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$ — целое. Докажите, что $\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1$.

4. Для каждого числа от 1 до 1000 выписали все его натуральные делители (в результате некоторые числа выписаны много раз). Определите, что больше: сумма всех выписанных чисел или миллион?

5. **(a)** На столе лежат палочки длиной 1 см, 2 см, ..., 100 см. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди убирают со стола палочки: Петя одну, а Вася две, пока не останутся 3 палочки. Если из них можно сложить треугольник, то выигрывает Петя, в противном случае выигрывает Вася. Начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

(b) А если палочек 99?

6. Пусть $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что существует единственное натуральное $n \geqslant 1$ такое, что $a_n < \frac{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant a_{n+1}$.

7. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Все его делители упорядочили по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$.

(a) Докажите, что $d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$ меньше n^2

(b) Найдите все такие n, что n^2 делится на $d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$

8. По кругу написаны различные положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. Диана выписала в свою тетрадку все суммы квадратов соседних чисел, то есть числа $x_1^2+x_2^2, x_2^2+x_3^2, \ldots, x_{2020}^2+x_{2021}^2, x_{2021}^2+x_1^2$. Лев выписал в свою тетрадку все удвоенные произведения соседних чисел, то есть числа $2x_1x_2, 2x_2x_3, \ldots, 2x_{2020}x_{2021}, 2x_{2021}x_1$. Докажите, что наибольшее число в тетрадке Льва больше, чем наименьшее число в тетрадке Дианы.