

Новогодняя абака

Волейбол.

10. Кубок России по волейболу проходит по олимпийской системе. В каждом круге команды разбиваются на пары. Проигравшая команда вылетает с турнира, победившая команда проходит в следующий круг. Известно, что в каждом круге каждой команде находилась пара, а команда-чемпион выиграла пять игр. Сколько команд выиграла больше игр, чем проиграла?

20. В волейбольном турнире 12 команд сыграли друг с другом по одному разу. В каждом матче одна из команд одержала победу, ничьих не бывает. Ни одна из команд не одержала больше шести побед. Какое наименьшее количество побед могло оказаться у команды, занявшей последнее место?

30. В волейбольном турнире приняло участие 20 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, ничьи снова были невозможны. До начала турнира команды были упорядочены в соответствии с некоторым рейтингом. Назовём матч *неожиданным*, если в нём победила команда с более низким рейтингом. После турнира оказалось, что расположение команд по местам такое же, как по рейтингу (у команд при этом может быть одинаковое количество побед, тогда учитывались некоторые дополнительные показатели). При каком наибольшем количестве неожиданных матчей такое могло быть?

40. В чемпионате мира по волейболу участвуют 16 команд. Среди них k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачёт чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг, то есть каждая команда играет с каждой один раз и кто-то обязательно выигрывает. При каком наибольшем k может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество побед в чемпионате Европы, наберёт строго наименьшее количество побед в чемпионате мира?

Алгебра.

10. Каждое из трёх последовательных целых чисел уменьшили на 1. Их произведение после этого уменьшилось вдвое. Каким могло быть меньшее из этих трёх чисел?

20. Сколько существует пар (x, y) , для которых

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ ||x| - |y|| = 1 \end{cases}$$

30. Используя цифры 1, 3, 4 и 6, а также скобки и знаки арифметических действий, получите 24.

40. Назовём тройку чисел (a, b, c) *прекрасной*, если $abc = 4(a + b + c) + 16$. Артём нашёл такое t , что для всех прекрасных троек значение выражения

$$\frac{1}{a+t} + \frac{1}{b+t} + \frac{1}{c+t}$$

одно и то же. Чему равно t ?

Комбинаторная геометрия.

10. Одиннадцатиугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Назовём треугольник *внутренним*, если все три его стороны — это диагонали многоугольника, а не стороны. Приведите пример разрезания, при котором будет максимальное количество внутренних треугольников.

20. Отметьте на плоскости 13 точек так, чтобы было 22 правильных треугольника с вершинами в них.

30. Какое наименьшее количество точек надо взять на плоскости так, чтобы среди их попарных расстояний были числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64?

40. В выпуклом десятиугольнике провели все диагонали. На какое наибольшее число частей он мог оказаться разрезанным?

Геометрия.

10. Точки A, B, C, D лежат на прямой в указанном порядке. Точка E такова, что $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45^\circ$. Точки H и F — середины AC и BD . Найдите угол HEF .

20. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X такая, что $BX = XC$ и $\angle BXC = 150^\circ$. Чему равен угол AXD ?

30. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C , а угол A — тупой. Точка K на стороне BC такова, что угол KAC — прямой. Найти отношение $\frac{AB}{KC}$.

40. Приведите пример выпуклого четырёхугольника, все стороны которого различны, нет параллельных сторон, но его одним прямолинейным разрезом можно разделить на две части, каждая из которых имеет ось симметрии. Про картинку из примера должно быть понятно, как она однозначно строится.

Числа.

10. Числа A и B делятся на все натуральные числа от 1 до 115. На какое наименьшее натуральное число может не делиться $A + B$?

20. Найти все натуральные n , чтобы $n^2 - 5n + 6$ было точной степенью двойки.

30. Какой остаток даёт число $2^{1023} + 3^{1023} + 6^{1023}$ при делении на 17?

40. Найдите все пары чисел a и b , для которых $a^2 + a - b^2 = 250$.