Разнобой

Задача 1. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Задача 2. а) Можно ли целые числа от 1 до 1000 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых девяти подряд делилась на 9?

б) Можно ли целые числа от 1 до 999 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых десяти подряд делилась на 9?

Задача 3. Про компанию из 19 человек известно, что какую бы тройку людей мы ни взяли, в ней всегда найдутся двое знакомых. Докажите, что кто-то в этой группе знает хотя бы 9 человек

Задача 4. Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио. Когда все клетки заполнены, Базилио берет себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берет лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

Задача 5. Номера старинных трамвайных билетов состоят из 6 цифр, каждая – от 0 до 9. Вова считает пару номеров «хорошей», если они отличаются ровно двумя цифрами. Сколько существует хороших пар билетов?

Задача 6. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3, причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

Задача 7. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, что $2ab = \overline{ab}$, где $\overline{ab}$ означает число, полученное приписыванием числа b сзади к числу a. Числа a и b не могут начинаться с 0.

Добавка

Задача 1. Куб $n \times n \times n$ состоит из единичных кубиков. Рассмотрим всевозможные кубы, содержащиеся в этом кубе и составленные из единичных кубиков.

Будем говорить, что один такой куб содержится внутри другого такого куба, если все его кубики принадлежат другому кубу и не лежат на его гранях. Какое наибольшее количество кубов со стороной больше 1 можно выбрать так, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?

Задача 2. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 2×2019 в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чьё число больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?