Что-то происходит, а мы за чем-то следим.

1. На клетчатой доске можно выделить любой прямоугольник, где есть клетки двух цветов, и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли такими операциями доску, покрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?

2. В Дримвилле живет сто джентльменов разного возраста. У каждого из них на цилиндре мелом записано натуральное число. Все джентльмены очень любят на закате гулять по местному парку. Когда два джентльмена встречаются, они раскланиваются, а после того оба стирают свои числа с цилиндров, и младший записывает себе на цилиндр наибольший общий делитель этих двух чисел, а старший — их наименьшее общее кратное.

(a) Докажите, что рано или поздно числа на цилинрах перестанут меняться.

(b) Пусть изначально на цилиндрах написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Какое число в конце концов будет написано на цилиндре Джона, если Джон старше ровно 50 джентельменов?

3. На доске выписан ряд чисел: $1, 2, \ldots, 2018, 2019$. За один шаг разрешается выбрать три написанные подряд числа a, b и c, из которых ни одно не равно 0, и заменить их на тройку чисел $b-1$, $c-1$, $a-1$ в указанном порядке. Какую наименьшую сумму записанных на доске чисел можно получить, делая такие шаги?

4. В Цветочном городе любые два коротышки либо дружат, либо враждуют. Каждое утро ровно один из коротышек может начать новую жизнь: подружиться со всеми врагами и поссориться со всеми друзьями. Оказалось, что любые трое коротышек могут подружиться. Докажите, что все коротышки могут подружиться

5. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого–то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

6. По кругу стоят 111 башен, в которых сидят 200 рыцарей, 100 из которых – чёрные, а остальные – белые. В конце каждого часа каждый черный рыцарь перемещается в соседнюю башню по часовой стрелке, а каждый белый рыцарь перемещается в соседнюю башню против часовой стрелки. Докажите, что найдется час, в течение которого хотя бы одна башня будет без рыцарей.