Как сделать?

1. Существуют ли 5 различных натуральных чисел таких, что сумма любых четырёх из них – точный квадрат?

2. На шахматной доске расставлено несколько ладей. В какое наименьшее число цветов заведомо можно раскрасить этих ладей, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга? (Ладьи не бьют друг сквозь друга).

3. На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать целое число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел

4. Можно ли заполнить таблицу 2019×2019 различными натуральными числами так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×2 или 2×1 большее число делилось бы на меньшее, а отношение самого большого числа в таблице к самому меньшему не превосходит 2019^4?

5. Император пригласил на праздник 2021 волшебника, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. На окружности стоят n фишек. За ход можно взять две из них и переместить в противоположных направлениях на равные дуги. Докажите, что не более, чем за $n-1$ ход можно добиться того, чтобы точки, в которых стоят фишки, образовывали правильный n-угольник. (В исходной позиции и по ходу перемещения две или больше фишек могут находиться в одной точке.)

7. Квадрат разбит на квадратики (не обязательно одинаковые). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в восемь цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.