

Серия 17. Подсчет двумя способами.

1. Можно ли расставить по кругу 7 целых чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх расположенных подряд - 2, ..., каких-то трёх расположенных подряд - 7?
2. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?
3. Лиза закрасила в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое количество закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательная Лиза закрасила все клетки.
4. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ - набор натуральных чисел. Построим по нему набор $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ по следующему правилу:
 b_0 — количество чисел из A которые больше 0;
 b_1 — количество чисел из A которые больше 1;
 b_2 — количество чисел из A которые больше 2
и т.д., пока не пойдут одни нули. Докажите, что сумма чисел в A равна сумме чисел в B .
5. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.
6. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз
7. В классе 21 ученик. Каждый день какие-то пары из них жмут друг другу руки, а какие-то - нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2016 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из шестерых человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 144 рукопожатий.
8. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник M причем все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M
9. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки. Для каждого города статист подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих данный город с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам.
 - а) Могло ли у него получиться 100000?
 - б) А 200000?
10. Для любых натуральных $0 < k < m < n$ докажите, что числа C_n^k и C_n^m имеют общий делитель.