Индукция и сравнения по модулю - 2.

Индукция

1. В выпуклом n-угольнике ($n > 3$) вершины покрашены в три цвета таким образом, что каждый цвет присутствует, причём никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет. Докажите, что его можно разбить не пересекающимися диагоналями на треугольники, в каждом из которых вершины покрашены в разные цвета.

2. В 2020 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 202000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2019 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

3. Назовем натуральное число ровным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n - значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел

Сравнения по модулю

4. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$ для любого натурального n.

5. **(a)** Проверьте, что для любого натурального n $10^n \equiv 1 \pmod 9$, $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$ и $10^{2n-1} \equiv -1 \pmod{11}$

   (b) Докажите, что $\overline{a_n \dots a_1 a_0} \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod 9$

   (c) Докажите, что $\overline{a_n \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$
   $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ *– это десятичная запись числа. Например,* $\overline{123456789} = 123456789$

6. Записали пятизначное число и все числа, получающиеся перестановками его цифр. У каждого из них нашли остаток при делении на 11. Докажите, что есть остаток, который не встречается среди полученных ни разу.

7. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \dots, \frac{3}{98}, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равнялось бы единице?

8. Докажите, что $(a+c)^3(a+b)^3(a+d)^3 + (b+c)^3(b+d)^3(c+d)^3$ делится на $a + b + c + d$ для любых натуральных a, b, c, d.