

Что-то про вспомогательный подсчёт.

Вступительное слово. Думаю, многие из вас решали задачи, где ключевой шаг был посчитать двумя способами одну и ту же величину. Тема стала олимпиадной классикой и многие даже и перестали задумываться, что школьные текстовые задачи на составление уравнений тоже на подсчёт двумя способами. То есть тема буквально повсюду. Иногда в задаче сложно понять, что именно считать двумя способами.

Не претендуем на то, что охватим широкий спектр примеров на этот счёт. Скорее наоборот сосредоточимся на довольно узком кусочке. Где нужно подсчитывать рёбра (все или не все) в графе.

Задача 1. В школе каждая девочка знает больше половины всех мальчиков. Докажите, что какой-то мальчик знает больше половины всех девочек.

Задача 2. В школе каждый ученик дружит с пятью мальчиками и пятью девочками. Докажите, что количество учеников делится на 4.

Задача 3. Немного в сторону, исключительно письменная. В школе каждый ученик знаком с десятью другими. Сколько учеников может быть в школе?

Задача 4. По кругу сидят 100 человек. Каждый из них рыцарь или лжец. На вопрос “Сидит ли с Вами рядом хотя бы один лжец?” отрицательно ответило столько же людей, сколько всего лжецов среди собравшихся. Какое наименьшее количество лжецов могло быть?

Задачи посложнее.

Замечание. Каждая из этих задач фактически состоит из двух частей. Поскольку в них нетривиальный ответ, то придумать пример – тоже хорошее дело. Вы можете сдать свой пример, и если он и правда оптимальный, то мы зачтём этот пункт. Устно

Задача 5. Какое наибольшее количество количество клеток можно закрасить на доске 7×7 , чтобы не было прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, с вершинами в центрах закрашенных клеток?

Задача 6. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик – хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: “Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей – двоечники”, а каждый мальчик сказал: “Среди знакомых мне девочек не менее половины – троечницы”. Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков – двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами?

Задача 7. На острове рыцарей и лжецов есть 2018 посёлков, соединенные дорогами так, что получившийся граф оказался деревом. В каждом поселке жители только одного из типов. Жители каждого поселка сделали 2 утверждения:

1. Наш поселок соединен хотя бы с 3 другими поселками.
2. Наш поселок соединен хотя бы с 2 поселками лжецов.

Какое наименьшее количество поселков лжецов может быть?