

Дискретная непрерывность. Теперь и на окружности

Задача 1. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

- а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
- б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
- с) По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что для каждого чётного k не превосходящего 30 можно выбрать k школьников подряд, чтоб среди них мальчиков и девочек было поровну.

Задача 2. За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.

Задача 3. Письменно В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

Задача 4. а) На плоскости есть $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

б) На плоскости есть $2n+1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

Задача 5. а) На плоскости нарисовано 200 красных и 200 синих точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Всегда ли можно провести прямую так, чтобы с каждой стороны лежало поровну красных и синих точек?

б) На плоскости есть 200 красных и 200 синих точек общего положения. Всегда ли можно провести какую-то прямую так, что слева и справа от неё лежит по 100 синих и 100 красных точек?

Задача 6. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.