Индукция и сравнения по модулю.

Индукция

1. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

2. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — также целое при любом целом n.

3. $2m$-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m+1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

4. В теннисном турнире каждый участник сыграл с каждым по партии. Докажите, что участников можно занумеровать так, что каждый выиграл у непосредственно следующего за ним.

5. Докажите, что существует 100-значное число делящееся на 2^{100} в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

6. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску записывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел. Докажите, что сотое записанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

7. $2n$ чисел разбили на пары так, что произведение в каждой паре не является полным квадратом. Докажите, что количество способов разбить эти числа на пары так, чтобы произведение в каждой паре не являлось полным квадратом хотя бы $n!$.

Сравнения по модулю

В этой части листка можно пользоваться тем, что числа можно делить с остатком (т.е. тем, что для любого целого a и натурального b найдутся целые q и r такие, что $0 \leqslant r < b$ и $a = b \cdot q + r$), но никакими свойствами остатков пользоваться нельзя.

Определение. Будем говорить, что целые числа a и b *сравнимы по модулю* n, если $a - b$ делится на n. В этом случае мы будем писать $a \equiv b \pmod{n}$

8. **(письменная)** Докажите свойства сравнений по модулю:
   (a) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$;
   (b) Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$;
   (c) Числа a и b дают одинаковые остатки при делении на n тогда

и только тогда, когда $a \equiv b \pmod{n}$;
(d) Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ и $a - c \equiv b - d \pmod{n}$;
(e) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $ak \equiv bk \pmod{nk}$ для любого целого k;
(f) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $ak \equiv bk \pmod{n}$ для любого целого k;
(g) Если n взаимно просто с k и $ak \equiv bk \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$;
(h) Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$;
(i) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ для любого натурального k

9. **(a)** Найдите остаток от деления числа $2012 \cdot 2014 \cdot 2019$ при делении на 2020, не перемножая четырёхзначные числа

(b) Докажите, что $102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 201 - 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$ делится на 101.