Задачки со сдвигом

Задача 1. Несколько мудрецов выстроились в колонну. На всех были либо черные, либо белые колпаки. Оказалось, что среди любых 10 подряд идущих мудрецов поровну мудрецов с белыми и черными колпаками, а среди любых 12 подряд идущих - не поровну. Какое наибольшее количество мудрецов могло быть?

Задача 2. Несколько фишек двух цветов расположены в ряд (встречаются оба цвета). Известно, что фишки, между которыми 10 или 15 фишек, одинаковы. Какое наибольшее число фишек может быть?

Задача 3. Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, a_2^2, \ldots a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2 . Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots a_{1000}$ делится на 41?

Задача 4. Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

Задача 5. Для каких m и n можно отметить некоторые клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы в любом прямоугольнике $m \times n$ была ровно одна отмеченная клетка.

а) Прямоугольники нельзя поворачивать.

б) Прямоугольники можно поворачивать.

Задача 6. Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы?

Задача 7. В клетках квадрата 13×13 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел четна, а в любом кресте из 5 клеток сумма чисел нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах нашего квадрата 13×13 делится на 4.

Задача 8. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101 101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?