

Дискретная непрерывность

Задача 1. В ряд выложено 50 белых и 50 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики – белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых

Задача 2. Письменно Федя начал писать Лёше сообщения по поводу занятий. Наконец, после 100-го сообщения Лёша сподобился ответить Феде, и между ними завязалась оживленная переписка. В какой-то день после этого Федя был настолько занят, что Лёше пришлось отправить 50 писем, прежде чем достучаться до него. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 писем.

Задача 3. В стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

Задача 4. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

Задача 5. Письменно На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина — черные.

a) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.

b) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две равные части с равным числом черных клеток.

Задача 6. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25

Задача 7. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?

Задача 8. Письменно В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

Задача 9. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 12345?

Задача 10. Маша хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например из числа 12345 можно получить число $12+3+45=60$). С полученным число разрешается сделать подобную операцию и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.