Клеточки и таблички

Конструктивчики

Задача 1. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в каждых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в каждых двух строках – различным?

Задача 2. В некоторых клетках квадратной таблицы $n \times n$ стоят звёздочки. Известно, что если вычеркнуть любой набор строк (только не все), то найдётся столбец ровно с одной невычеркнутой звёздочкой. (В частности, если строки совсем не вычёркивать, то столбец ровно с одной звёздочкой существует.) Доказать, что если вычеркнуть любой набор столбцов (только не все), то найдётся строка ровно с одной невычеркнутой звёздочкой.

Задача 3. У Аскара Флоридовиа есть таблица $n \times n$, в клетках которой стоят плюсы и минусы. За один ход он может в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Он уже знает, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Но сейчас он очень торопится, поэтому хочет получить таблицу из всех плюсов за не более,чем n ходов. Докажите, что у него получится.

Раскрасочки

Задача 4. В классе парты выставлены в форме квадрата 9×9. За каждой из 81 парт сидят преподаватель и сдающий ему задачу школьник. Как только Мария Юрьевна объявила, что через пять минут будет разбор, каждый школьник пересел к одному из соседних по диагонали преподователей. При этом могло оказаться, что одному преподавателю теперь пытаются сдать несколько школьников. Докажите, что преподавателей, которым никто ничего не сдаёт будет не меньше 9.

Задача 5. Назовём клетку квадрата 7×7 *удачной*, если при её удалении оставшуюся доску можно разрезать на прямоугольники 1×3. Сколько всего удачных клеток?

Задача 6. Квадрат $n \times n$ без угловой клетки разрезали на прямоугольники $1 \times k$. Докажите, что $n - 1$ делится на k.

Оценочки

Задача 7. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

Задача 8. Владимиру Алексеевичу принесли большую белую шоколадку 8×8. Но он решил не показывать, как съесть дольку из серединки, а раскрашивать её. Дольку можно покрасить в чёрный цвет, если у неё хотя бы три белых соседа. Какое наибольшее количество долек можно сделать черными?

Задача 9. Фигура хромой слон бьет как слон, но только в трёх своих направлениях. Какое максимальное число хромых слонов можно поставить на доске так, чтобы они не били друг друга (направление, в котором каждый хромой слон не бьет, вы выбираете сами)?