Нетривиальная олимпиадная идея. Чётность в разных, но не в самых разных проявлениях.

Задача 1. По кругу расставили числа от 1000 до 2000 в некотором порядке, у каждых двух соседних посчитали наибольший общий делитель. Какое наименьшее количество различных может быть среди этих 1001 числа?

Задача 2. (**Письменная**) Назовём натуральное число n *актуальным*, если в выражении

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n$$

можно выбрать знаки так, чтобы значение полученного выражения было равно 2020. Сколько существует актуальных чисел, не превосходящих миллиона?

Задача 3. а) На доске 2019×2019 стоят 2019 небьющих друг друга ладей. Затем каждая из них сходила ходом коня. Могут ли теперь ладьи по-прежнему не бить друг друга?
б) На какие натуральные n можно заменить 2019 в пункте а), чтобы описанная ситуация была возможна?

Задача 4. Максим написал по кругу 2019 чисел, каждое из которых равно 1 или -1, причём не все числа были равны. После чего Артём выписал произведения всех десяток чисел, идущих подряд, а затем сложил получившиеся произведения. Какое наибольшее значение суммы могло получиться?

Задача 5. Можно ли выписать 20 действительных чисел, чтобы их попарные суммы образовывали 190 последовательных натуральных чисел?

Задача 6. У Лаборанта 27 гирек. Масса каждой — целое число граммов. Оказалось, что если отложить любую гирю, то остальные гири можно разделить на две равные группы по 13 гирь с равными массами. Докажите, что массы всех гирь равны.

Задача 7. а) На доску выписано n натуральных чисел, не превосходящих $2^n - 1$. Лиза посчитала суммы всех наборов нескольких из них. Оказалось, что все 2^n получившихся сумм (в том числе сумма пустого набора, которая равна 0) дают различные остатки при делении на 2^n. Докажите, что среди выписанных чисел ровно одно нечётное число.
б) Сколько таких наборов вообще существует? Наборы, отличающиеся порядком чисел, считаем одинаковыми.