Про решётки

Квадраты.

1. Артём нарисовал на плоскости квадрат со стороной n и разбил его на квадратики со стороной 1. Потом он взял зелёный маркер и отметил все вершины получившихся квадратиков. Лиза хочет провести несколько прямых и зачеркнуть ими все зелёные точки. Какое минимальное число прямых ей придётся провести?

2. Внутри квадрата отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон квадрата (в случайном порядке), и она опять попала внутрь квадрата. Докажите, что она вернулась на исходное место.

3. В какое наименьшее число цветов можно покрасить клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы ячейки одного цвета на соприкасались (по стороне) и у ячеек одного цвета не было общих соседей (по стороне)?

4. Город представляет из себя квадрат со стороной n и состоит из квадратных кварталов: каждый квартал – квадрат со стороной 1 Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{n^2}

5. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого. Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах

(a) меньшего квадрата, чем изначальный?

(b) большего квадрата, чем изначальный?

Не квадраты.

6. Лиза нарисовала на плоскости правильный треугольник со стороной n и разбила его на правильные треугольники со стороной 1. Потом она взяла красный маркер и отметила все вершины получившихся треугольников. Артём хочет провести несколько прямых и зачеркнуть ими все красные точки. Какое минимальное число прямых ему придётся провести?

7. **(a)** Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

(b) Внутри правильного шестиугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон шестиугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь шестиугольника. Обязательно ли она вернулась на исходное место?

8. В какое наименьшее число цветов можно покрасить ячейки шестиугольной решётки так, чтобы у ячеек одного цвета не было общих соседей?

9. Город представляет из себя треугольник со стороной n и состоит из треугольных кварталов: каждый квартал имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что количество маршрутов из угла A в угол B, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{n^2}

10. В вершинах равностороннего треугольника сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого. Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах

(a) меньшего равностороннего треугольника, чем изначальный?

(b) большего равностороннего треугольника, чем изначальный?

И ещё не квадраты.

11. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n+1, \ldots, n+8$. При каких n он сможет это сделать?

12. Правильный треугольник со стороной $n > 1$ разбит на n^2 правильных треугольничков со стороной 1. Их пронумеровали натуральными числами от 1 до n^2.

(a) Можно ли эти числа расставить в клетках квадрата $n \times n$ так, чтобы любые два числа, записанные в соседних клетках квадрата, были записаны и в соседних треугольничках?

(b) Можно ли эти числа расставить в клетках квадрата $n \times n$ так, чтобы любые два числа, записанные в соседних треугольничках, были записаны и в соседних клетках квадрата?

13. Доска представляет из себя треугольник со стороной n и состоит из треугольных клеточек, каждая из которых — правильный треугольник со стороной 1. Ладья на этой доске бьёт в трёх направлениях.

(a) Сколько клеток может бить ладья, стоящая на этой доске?

(b) Какое максимальное количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на такой доске, если $n = 7$?

(c) Какое максимальное количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на такой доске, если $n = 3k+1$?