Плоский аналог задачи

1. Докажите, что плоскость, проходящая через проекции вершины A тетраэдра $ABCD$ на биссекторные плоскости двугранных углов при ребрах BC, CD, DB, параллельна плоскости BCD.

2. Внутри тетраэдра отметили произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему точку X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре такие прямые пересекаются в одной точке.

3. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

4. Треугольная пирамида $SABC$ с основанием ABC — правильная. На её ребрах SA, SB, SC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно таким образом, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Точка O — центр описанной сферы тетраэдра $SABC_1$. Докажите, что $SO \perp A_1B_1C$.

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 тетраэдра пересекаются в одной точке H. Докажите, что точки H, A_1, и три точки, делящие отрезки BB_1, CC_1, DD_1 в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

6. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что точка O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

7. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X , а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.