Тренировочная олимпиада

1. На каждом неграничном единичном отрезочке доски 8×8 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезочек лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

2. На ребре AB правильного тетраэдра $ABCD$ отмечена произвольная точка X. Докажите, что ортоцентры всевозможных треугольников CDX лежат на фиксированной окружности, не зависящей от положения точки X.

3. В ожерелье 60 бусин, каждая из которых покрашена в какой-то цвет. Известно, что среди любых 6 подряд идущих бусин встречаются бусины не более чем трёх разных цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может встречаться в таком ожерелье?

4. Для каких нечётных натуральных чисел n существует такое нечётное натуральное число k и множество S из n различных остатков по модулю k такое, что при всех $r = 1, 2, \dots, k-1$ количество элементов в пересечении $S \cap (S + r)$ чётно? Символом $S + r$ обозначено множество всех сумм $s + r$ (по модулю k), где $s \in S$.