Производящие функции

Производящей функцией последовательности a_0, a_1, ..., a_n, ...называется ряд $\sum_n a_n x^n$. В задачах, приведенных ниже, этот ряд сходится в некоторой окрестности нуля. Соответствующую функцию $F(x)$ мы также будем называть производящей функцией (не особо заботясь о том, при каких x она корректно определена).

В нашем листке производящие функции будут использоваться не столько для последовательностей, сколько для множеств. А именно, пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рассмотрим множество $A = \{a_1, a_2, ...\}$, состоящее из целых неотрицательных чисел, возможно, повторяющихся (при этом мы считаем, что каждое число встречается в A конечное количество раз). Тогда полезно сопоставить этому множеству последовательность, где на месте с номером i стоит количество вхождений этого числа во множество A. После чего рассмотреть для этой последовательности производящую функцию. Иначе говоря, полезно рассмотреть производящую функцию $f_A(x) = \sum_{a \in A} x^a$. Например, $f_{\mathbb{N}_0}(x) = \sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^a = \frac{1}{1-x}$.

Идея в том, что мы получаем возможность следить за вхождениями во множество A тех или иных чисел, рассматривая их как степени в производящей функции. Такой трюк часто бывает полезен для изучения сумм элементов из множества A (см. задачу 2).

1. **Важная задача.** Пусть $f_A(x)$ — производящая функция множества A, состоящего из целых неотрицательных чисел (возможно, повторяющихся). Вычислите производящую функцию множества $A + A := \{a_i + a_j \,:\, i \neq j\}$. (Здесь множество $A + A$ также может содержать повторяющиеся элементы.)

2. **(a)** Пусть k — фиксированное натуральное число и a_n — количество разложений числа $n \in \mathbb{N}$ в сумму k натуральных слагаемых (разложения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются различными). Вычислите производящую функцию последовательности $\{a_n\}$.
   (b) Пусть k — фиксированное натуральное число и b_n — количество разложений числа n в сумму натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит k (разложения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Вычислите производящую функцию последовательности $\{b_n\}$.

   (c) Пусть p_n — количество разложений числа n в сумму натуральных слагаемых (разложения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Вычислите производящую функцию последовательности $\{p_n\}$.

   Для удобства во всех пунктах мы полагаем $a_0 = b_0 = p_0 = 1$.

Пара советов. Для множеств из условия полезно рассматривать их производящие функции и использовать алгебраический аппарат для работы с ними. В частности, полезно попробовать подставить вместо переменной x какое-нибудь число и посмотреть, что получается.

В некоторых ситуациях будут встречаться не только бесконечные суммы, но и бесконечные произведения. Это нормально.

Если $C = A \sqcup B$ — объединение непересекающихся множеств A и B, состоящих из натуральных чисел (возможно, повторяющихся), то $f_C = f_A + f_B$. Это соображение позволяет выписывать соотношения между производящими функциями множеств разбиения.

3. Множество $\mathbb{N}_0$ разбито на конечное число арифметических прогрессий с начальными членами a_1, ..., a_k и разностями d_1, ..., d_k. Докажите, что

(a) $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = 1$;

(b) $\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_k}{d_k} = \frac{k-1}{2}$;

(c) среди чисел d_1, ..., d_k есть два одинаковых.

4. Предположим, что существуют два различных множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ из натуральных чисел (возможно, повторяющихся), таких, что $A + A = B + B$. Докажите, что n — степень двойки.

5. Докажите, что существует ровно один способ разбить натуральный ряд на два множества A и B, таких, что для каждого натурального n количество способов представить число n в виде суммы двух различных элементов из A равно количеству способов представить n в виде суммы двух различных элементов из B.