Игры

1. В ряд выписаны числа от 1 до 2020. Двое по очереди вставляют между этими числами знаки «+», «−» и «×» (игроки сами выбирают, на какое место из оставшихся поставить очередной знак). Докажите, что игрок, делающий первый ход, может добиться того, чтобы окончательный результат был нечётным числом.

2. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо цифры, произвольно чередуя 0 и 1, пока не станет всего 2019 цифр. Каждый раз после того, как первый выписал очередную цифру, второй меняет между собой две цифры из уже написанного ряда (когда написана только одна цифра, второй пропускает ход). Всегда ли второй может добиться того, чтобы после его последнего хода полученное число было *палиндромом* (то есть одинаково читалось слева-направо и справа-налево).

3. Полоска из 101 клетки заполнена фишками. Мудрец и хитрец играют в следующую игру. Мудрец указывает хитрецу на фишки в некотором порядке, на каждую по разу, а хитрец либо снимает указанную фишку, либо сдвигает её в соседнюю свободную клетку (если такая есть). Сдвигать можно только дважды за игру. Может ли хитрец добиться того, чтобы в конце игры оставшиеся две фишки стояли рядом?

4. Двое играют в такую игру. Первый игрок пишет какую-то цифру, второй игрок приписывает к ней слева или справа еще одну цифру, первый игрок приписывает к образованному числу еще одну цифру и т. д. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы ни одно число, получающееся после хода второго игрока, не было квадратом целого числа.

5. Игровое поле имеет вид прямоугольника $m \times n$. Два игрока по очереди ставят в клетки поля прожектора. Каждый прожектор освещает все клетки, которые не ниже и не левее той клетки, где он стоит. Каждый новый выставленный прожектор должен освещать хотя бы одну новую клетку. Проигрывает тот, кто поставит прожектор в левый нижний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

6. На окружности отмечено 2077 точек. Два игрока по очереди проводят хорду с концами в отмеченных точках. Хорды не должны иметь общих точек, даже концов. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Двое играют в следующую игру. Имеются доска, на которой написано число 1000, и кучка из 1000 спичек. За ход каждый из игроков (ходят по очереди) может либо взять из кучки, либо положить в неё не более пяти спичек (исходно у обоих игроков нет ни одной спички), а затем на доску записывается число спичек в кучке после данного хода. Проигрывает тот, после чьего хода на доске появится уже имеющееся на ней число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?