Разгробление

A. *(IMO-2017, задача 6)* Упорядоченная пара (x, y) целых чисел называется *примитивной точкой*, если наибольший общий делитель x и y равен 1. Дано конечное множество S примитивных точек. Докажите, что найдётся непостоянный однородный многочлен $f(x, y)$ с целыми коэффициентами, такой что $f(x, y) = 1$ для любой пары (x, y) из S.

1. Решите задачу для случая $|S| = 1$.

2. Пусть многочлен[1] $f(x, y)$ удовлетворяет утверждению задачи. Найдите ещё бесконечно много многочленов, удовлетворяющих утверждению задачи.

Обозначение: $S =: \{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$.

3. Докажите, что для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ найдётся многочлен $f_i(x, y)$, для которого выполнено $f_i(x_i, y_i) \neq 0$ и $f_i(x_j, y_j) = 0$ при $i \neq j$. Далее, пусть вам задали многочлен $f_i(x, y)$ с такими свойствами. Докажите, что для любого натурального $d \geqslant \deg f_i(x, y)$ найдётся многочлен степени d, принимающий во всех точках множества S те же значения, что и $f_i(x, y)$.

4. Докажите, что найдётся натуральное a, для которого верно следующее. Для любого набора $b_1, b_2, \dots, b_k$ целых чисел, делящихся на a, найдётся такой многочлен $f(x, y)$, что $f(x_i, y_i) = b_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$.

5. Может возникнуть наивная мысль, что многочлен $f(x, y)$ с таким свойством найдётся вообще для любого набора целых чисел $b_1, b_2, \dots, b_k$. Приведите пример множества S, для которого это не верно.

6. Докажите утверждение задачи A, предполагая верной следующую лемму. Пусть a – произвольное натуральное число. Тогда найдётся такой многочлен $f(x, y)$, что $f(x, y) \equiv 1 \pmod{a}$ для любой пары взаимно простых x, y.

7. Докажите утверждение леммы в случае, когда a – степень простого числа.

8. Докажите лемму для произвольного a, тем самым завершая доказательство утверждения задачи A.

9. Пусть $|S| = 2$. Верно ли, что найдётся такое число C, что каким бы ни было S, найдётся многочлен степени не выше C, равный 1 в обеих точках из S?

[1] Здесь и далее все многочлены по умолчанию предполагаем непостоянными однородными с целыми коэффициентами.

B. Миша перемножил миллиард подряд идущих натуральных чисел, а Катя перемножила два миллиарда подряд идущих натуральных чисел. Докажите, что у них полуились разные результаты или кто-то из них ошибся.

Обозначим $10^9 =: M$. Предположим, что произведения Мишиных и Катиных чисел оказались равны.

10. Докажите, что все перемножаемые Мишей и Катей числа больше $2^{M/4}$.

11. Докажите следующую лемму. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ – положительные числа, меньшие $1/2$. Тогда среднее геометрическое чисел $1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_k$ отличается от их же среднего арифметического не более, чем на $2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)/k \leqslant 2\max(x_i^2)$.

12. Докажите, что среднее геометрическое Мишиных чисел очень близко к полуцелому числу (и придайте строгий смысл словам «очень близко»).

13. Докажите, что квадрат среднего геометрического Катиных чисел очень близок к целому числу.

Таким образом, последние два пункта приводят к противоречию и тем самым решают задачу B.