

## Последний листик

1. Найдите количество решений уравнения  $x + [x^2] = [x] + x^2$  на интервале  $x \in (0, 2021)$ . ( $[x]$  — это наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)
2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  касается его сторон в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $A_1B_1C_1$  лежит на высоте треугольника  $ABC$ , проведенной из прямого угла.
3. Существует ли непрерывная на всём  $\mathbb{R}$  функция, принимающее каждое действительное значение ровно три раза?
4. За столом сидят 17 гномов, перед каждым — кружка, в некоторые налит эль (но, быть может, не поровну). Первый разлил весь свой эль поровну в кружки всем остальным. Затем второй разлил свой эль поровну всем остальным (включая первого), затем третий гном и т. д. до семнадцатого. Когда и семнадцатый гном разлил свой эль, у всех оказалось столько же эля, сколько было вначале. Сколько эля в каждой кружке, если всего его 8 литров?
5. Из произвольной точки внутри данного куба опущены перпендикуляры на плоскости его граней. Полученные шесть отрезков являются диагоналями других кубов. Рассмотрим шесть сфер, каждая из которых касается всех рёбер соответствующего куба. Докажите, что все эти сферы имеют общую касательную прямую.
6. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.
7. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удалённой от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна  $180^\circ$ .
8. По кругу выписаны числа от 1 до  $n^2$ . Разрешается менять местами два стоящих рядом числа, если эти два числа не меняли местами раньше. Докажите, что если сделано не больше  $n^3/100$  таких операций, то можно сделать ещё одну.