Инвариант Дена

Определение. Многоугольники (многогранники) называются *равновеликими*, если их площади (объемы) совпадают.

Определение. Два многоугольника (многогранника) называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на части, переложив которые, можно получить другой.

Несложно заметить, что любые два равносоставленных многоугольника (многогранника) равновелики. Оказывается, что помимо этого верна следующая

Теорема (Ф. Бойяи, П. Гервин; 1832). Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Хотелось бы верить, что существует похожая теорема и для многогранников, однако не все так просто. Давайте разбираться.

Пусть $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq \mathbb{R}$. Определим

$$V(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i | q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Будем рассматривать $\mathbb{Q}$-*линейные функции* f, которые удовлетворяют следующим свойствам: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Q}$

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

К примеру, $f\left(\sum_{i=1}^{k} q_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i)$, т.е. значение функции во всех точках множества $V(M)$ определяется только значениями функции в точках множества M.

1. Пусть $M \subseteq M' \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой $\mathbb{Q}$-линейной функции $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ существует $\mathbb{Q}$-линейная функция $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ такая, что для всех $m \in M : f(m) = f'(m)$. Грубо говоря, любая $\mathbb{Q}$-линейная функция f *продолжается* с M на M'.

Возьмем многогранник P. Обозначим через M_P множество всех двугранных углов между соседними гранями, дополненное числом π. Рассмотрим $\mathbb{Q}$-функцию $f : V(M_P) \to \mathbb{R}$ такую, что $f(\pi) = 0$.

Инвариантом Дена многогранника P относительно $\mathbb{Q}$-функции f назовем величину, равную

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} l(e) \cdot f(\alpha(e)),$$

где e – ребро многогранника P, $l(e)$ – его длина, а $\alpha(e)$ – величина соответствующего двугранного угла.

2. Пусть $\{P_1, \dots, P_n\}$ – разбиение многогранника P. Пусть $M = M_{P_1} \cup \dots \cup M_{P_n}$. Тогда для любой $\mathbb{Q}$-функции $f : V(M) \to \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \dots + D_f(P_n)$$

3. Докажите, что если два многогранника P и Q равносоставлены, то для любой $\mathbb{Q}$-функции

   $f : V(M_P \cup M_Q) \to \mathbb{R}$ такой, что $f(\pi) = 0$, выполняется равенство $D_f(P) = D_f(Q)$.
4. Найдите инвариант Дена для куба.
5. Найдите инвариант Дена для правильного тетраэдра.
6. Докажите, что $\frac{1}{\pi} arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ иррационально.[1]
7. Докажите, что существуют два равновеликих, но не равносоставленных многогранника.
8. Найдите инвариант Дена тетраэдра, натянутого на три попарно ортогональных ребра одинаковой длины, отложенных от одной вершины.
9. Найдите инвариант Дена тетраэдра, имеющего цепочку последовательных попарно ортогональных ребер одинаковой длины.[2]

[1] Вполне можете эту задачу пропустить, а утверждение принять на веру.
[2] HINT: Из шести таких штук можно сложить куб. Как?!