ТЧ, подобную которой вы, возможно, ещё не видели

1. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

2. Представим число $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ в виде несократимой дроби $\frac{p_n}{q_n}$. Докажем следующее утверждение: для любого натурального k найдётся такое натуральное n, что все числа $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$ делятся на 2^k.

Для начала – разогревочный пункт.
(a) Докажите, что если $n > 3$, то p_n делится на 8.

Поясним, что происходит в последующих пунктах. Как известно, функция $\ln(1+x)$ раскладывается в ряд $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$. Если в этот ряд подставить -2, то он становится похож на сумму, которая нам дана в условии. Таким образом, мы хотим в каком-то смысле рассмотреть логарифм от -1. Конкретно, мы обыграем равенство $2\ln(-1)=\ln((-1)^2)=\ln(1)=0$ и из него получим решение задачи. Конечно, в этих словах пока мало строгого смысла, уж хотя бы потому, что логарифм в -1 не определён[1]. Тем не менее, дальнейшие рассуждения будут совершенно строгие и приведут нас к успеху.

Определим многочлен $L_n(x)$ как $L_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}$. Также определим многочлен $f(x)$ как $f(x)=L_n(2x-x^2)-2L_n(x)$.

(b) Докажите, что многочлен $f(x)$ имеет вид $x^{n+1}\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n+2}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2n}x^{n-1}\right)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – целые числа. Подсказка: рассмотреть $f'(x)$.

(c) Подставьте $x=2$ в равенство $f(x)=L_n(2x-x^2)-2L_n(x)$ и докажите утверждение задачи.

3. *Топологическое доказательство бесконечности множества простых чисел.* Для чисел $a, b\in\mathbb{Z}$, $b>0$ через $A_{a,b}$ обозначим множество целых чисел, входящих в бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию, имеющую разность b и содержащую a, т.е. $A_{a,b}=\{a+nb : n\in\mathbb{Z}\}$. Множество $U\subseteq\mathbb{Z}$ назовём *открытым*, если для любого числа $a\in U$ найдётся $b\in\mathbb{N}$, такое что множество $A_{a,b}$ содержится в U.

(a) Докажите, что любое объединение открытых множеств открыто, а также что конечное пересечение открытых множеств открыто.

Множество $S\subseteq\mathbb{Z}$ назовём *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{Z}\backslash S$ открыто.

[1] На самом деле это равенство осмысленно и верно, если рассматривать *2-адический логарифм*. Вообще, мир p-адических чисел очень захватывающий, но глубоко в него погружаться доведётся, скорее всего, лишь очень немногим из нас.

(b) Докажите, что любое множество вида $A_{a,b}$ является замкнутым.
(c) Докажите, что любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, а также что конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.
(d) В предположении, что множество простых чисел конечно, докажите, что множество $\{-1,1\}$ открыто. Подсказка: докажите, что его дополнение замкнуто.
(e) Получите противоречие.

4. Find the maximum number of pairwise disjoint sets of the form

$$S_{a,b}=\{n^2+an+b \mid n\in\mathbb{Z}\},$$

with $a, b\in\mathbb{Z}$.

5. A set of postive integers is called *fragrant* if it contains at least two elements and each of its elements has a prime factor in common with at least one of the other elements. Let $P(n)=n^2+n+1$. What is the least possible positive integer value of b such that there exists a non-negative integer a for which the set

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

is fragrant?

6. Дано натуральное число k. Найдите число подмножеств множества $\{1,2,\ldots,5k\}$, сумма элементов которых делится на 5. (Сумму элементов пустого множества считать равной нулю.)