Геометрия окружностей на сфере

Для каждой точки X пространства, находящейся вне сферы Ω, обозначим через ω_X окружность, содержащую основания всех касательных из точки X к сфере Ω.

0. Докажите, что
(a) прямая AB касается сферы Ω тогда и только тогда, когда окружности ω_A и ω_B касаются друг друга;
(b) плоскость ABC касается сферы Ω тогда и только тогда, когда окружности ω_A, ω_B и ω_C имеют общую точку.

Мысль. Использовав отображение $X \mapsto \omega_X$, можно конфигурации точек пространства вне сферы сопоставить конфигурацию окружностей на сфере. Далее, применив стереографическую проекцию в какой-нибудь точке сферы (т. е. инверсию), мы получим планиметрическую задачу.

1. (*разбирается*) Около сферы Ω описан пространственный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

Решение. Обозначим точки касания через K, L, M, N соответственно. Достаточно доказать, что они лежат на одной окружности.Рассмотрим окружности ω_A, ω_B, ω_C, ω_D. По предыдущей задаче они касаются друг друга по циклу в точках K, L, M, N.

А теперь стереографически спроецируем всё со сферы на плоскость. Получится хорошо известное утверждение: если четыре окружности касаются друг друга по циклу, то точки касания лежат на одной окружности.

2. В четырёхгранный угол с вершиной S вписана сфера. На последовательных рёбрах угла отмечены точки A, B, C, D. Докажите, что вторые касательные плоскости к сфере, проведенные через отрезки AB, BC, CD, DA, пересекаются в одной точке.

3. К сфере проведены две скрещивающиеся касательные ℓ_X и ℓ_Y. На них выбираются случайные точки X и Y соответственно таким образом, что прямая XY касается сферы. Точку касания прямой XY и сферы обозначим через Z. Докажите, что всевозможные точки Z лежат на двух фиксированных окружностях.

4. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость также его касается.

5. Сфера Ω касается плоскости. Пусть A, B, C, D — четыре точки этой плоскости такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим точку A' такую, что сфера Ω касается граней тетраэдра $A'BCD$. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости и плоскость $A'B'C'D'$ касается сферы Ω.

6. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме, быть может, ребра BD. Оказалось, что точки касания сферы с ребрами AB, BC, CD, DA в указанном порядке являются вершинами квадрата. Докажите, что сфера все-таки касается ребра BD.

---

7. Докажите, что точки A, B, C пространства вне сферы Ω лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда окружности ω_A, ω_B, ω_C соосны.

На самом деле.

- Прямой в пространстве при отображении $X \mapsto \omega_X$ соответствует пучок окружностей, а плоскости — связка окружностей.

  Связка окружностей — множество всех окружностей, относительно которых фиксированная точка плоскости имеет постоянную степень.

- Существует такая однородная система координат $(A : B : C : D)$ в $\mathbb{R}P^3$, что отображение $X \mapsto \omega_X$ переводит точку $(A : B : C : D)$ в окружность $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$. Точки внутри сферы Ω при этом соответствуют мнимым окружностям.

- Проективные преобразования пространства $\mathbb{R}P^3$ индуцируют *круговые преобразования* множества окружностей на плоскости.

  Круговые преобразования — группа преобразований плоскости, порождённая инверсиями.

8. Дана сфера и две точки вне нее. Рассмотрим два конуса с вершинами в этих точках, описанных вокруг сферы. Докажите, что пересечение этих конусов можно засунуть в объединение двух плоскостей.

9. Вписанная в четырёхугольную пирамиду $SABCD$ сфера Ω касается граней SBC и SDC в точках X и Y соответственно. Пары лучей AB и DC, AD и BC пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PX и QY пересекаются тогда и только тогда, когда сфера Ω касается отрезка AC.