

## Фазовое пространство

0. На плоскости расположены многоугольник  $P$  площади 1 и 1000 точек. Докажите, что многоугольник можно сдвинуть на вектор, модуль которого не превосходит  $\sqrt{\frac{1000}{\pi}}$ , так, чтобы сдвинутый многоугольник не содержал ни одну из точек внутри себя.
1. (*Привет из 8 класса*) В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.
2. Дантес и Мартынов договорились встретиться в парке между 5:00 и 6:00 и подуться. Каждый из них приходит на место встречи случайным образом, ждёт 15 минут, и если встреча не произошла, то в гневе уходит. Какова вероятность того, что дуэль все-таки состоится?
3. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что машины (точки), соединенные веревкой длины меньше 2, смогли проехать из  $A$  в  $B$ , не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться круглые возы радиуса 1, если они идут на встречу друг другу по разным дорогам?

Для решения части следующих задач может быть полезен факт: площадь поверхности «шапочки» высоты  $h$  на сфере радиуса  $R$  равна  $\frac{h}{2R} \cdot 4\pi R^2$ . (Под «шапочкой» подразумевают пересечение полупространства и сферы.)

4. В пространстве нарисовано  $n$  прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}n$ , попарно не перпендикулярных друг другу.
5. В пироге радиуса  $R$  запекли монетку радиуса  $r < R$ . За какое минимальное число прямолинейных разрезов можно гарантированно задеть ножом монетку? Если разрез касается монетки, то она считается задетой.
6. *Отрезком* на сфере назовем любую дугу любой окружности, полученной как сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше  $2\pi$ . Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.

7. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.