Комбинаторика

1. Какое наименьшее количество уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?

2. У Пети есть набор синих фишек, а у Васи — набор красных. Они по очереди (первым ходит Петя) ставят свои фишки в вершины правильного 123-угольника. На своём ходу игрок должен положить фишку в ранее не занятую вершину так, чтобы в соседних вершинах не было ни одной фишки соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На свободные поля шахматной доски 8×8 по одному выставляли чёрных и белых слонов. Чёрный слон при выставлении бил чётное число ранее выставленных слонов любых цветов (в частности, мог не бить никого), а белый — нечётное. Так заполнили всю доску. Какое наименьшее число чёрных слонов могло быть выставлено? (Слоны бьют друг друга если стоят на одной диагонали и между ними нет других слонов.)

4. Есть таблица $2^{100} \times 100$. Алиса и Ева по очереди заполняют клетки первой строки таблицы: каждый свой ход Алиса ставит крестик в произвольную пустую ячейку строки, а Ева аналогично ставит нолик (Алиса ходит первой). После того как первая строка таблицы целиком заполнится, игроки переходят ко второй, потом к третьей, и так далее.

   Когда заполнятся все строки, игра заканчивается. Алиса добивается, чтобы среди строк в таблице было как можно больше различных, а Ева стремится к тому, чтобы различных строк было как можно меньше. Сколько различных строк будет при оптимальной игре обеих сторон?

5. Алиса и Базилио украли у Буратино чемодан. Замок не чемодане должен открыться, если три колёсика на нём, каждое из которых может занимать одну из восьми допустимых позиций, установлены в определённой комбинации. Однако, в силу ветхости механизма, чемодан откроется, если любые два колёсика из трёх поставлены в правильное положение. Базилио утверждает, что он сможет открыть чемодан не более чем за 32 попытки. Прав ли он? (Попыткой называется установка какой-либо комбинации колёсиков.)

6. Дано натуральное $n > 1$. Монетный двор собирается выпустить n типов монет с натуральными достоинствами $a_1 < \cdots < a_n$. Закон требует, чтобы сумму $S = a_1 + \cdots + a_n$ можно было набрать этими монетами единственным способом (взяв по одной монете каждого достоинства).
   (a) Докажите, что Монетный двор может соблюсти закон при некотором $S < n2^n$.
   (b) Докажите, что Монетный двор не может соблюсти закон, если $S \leqslant n2^{n-1}$.