Стереометрия

1. На сфере ω отмечена фиксированная точка M. Рассматриваются все тройки точек A, B, C на сфере, такие что MA, MB, MC попарно перпендикулярны. Докажите, что все плоскости ABC имеют общую точку.

2. Через точку P внутри сферы провели три хорды AA', BB', CC', не лежащие в одной плоскости. Оказалось, что сферы $(PABC)$ и $(PA_1B_1C_1)$ касаются. Докажите, что $AA' = BB' = CC'$.

3. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.

4. Дана равнобокая пирамида $VABCD$, основание $ABCD$ которой является квадратом. На прямой AC отметили точку M такую, что $VM = MB$ и $(VMB) \perp (VAB)$. Докажите, что $4AM = 3AC$.

5. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором выполняется равенство $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90°$. Пусть O цетнр описанной окружности треугольника ABC, M — середина отрезка CD. Докажите что прямые AB и MO перпендикулярны.

6. Сфера ω с центром в I касается плоскости ABC в точке P. Точка J диаметрально противоположная I в сфере $(IABC)$. Прямая JP повторно пересекает сферу ω в точке Q. Докажите, что сфера $(QABC)$ касается сферы ω в точке Q.