

Многочлены: иногда они возвращаются

1. Пусть $f(x) = 1 - 1/x$. Найдите $f(\underbrace{f(\dots f(2020)\dots)}_{2020})$.
2. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2014}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.
3. Могут ли окружность и парабола иметь ровно две общие точки так, чтобы в одной точке они касались, а в другой – нет?
4. Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| < 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?
Эта задача была в начале года, но тогда, по-видимому, мало кто до неё добрался...
5. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то на доску можно добавить многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — вещественное. Может ли при некотором n на доске оказаться многочлен $x^n - 1$?
6. Найдите наибольшее число h , удовлетворяющее следующему условию: для любого числа $a \in [0, h]$ и любого многочлена $P(x)$ степени 99, такого, что $P(0) = P(1) = 0$, найдутся такие $x_1, x_2 \in [0, 1]$, что $P(x_1) = P(x_2)$ и $x_2 - x_1 = a$.