

Геометрический разнобой

1. На сторонах четырехугольника $ABCD$ как на диаметрах построены окружности. Две окружности, проходящие через точку A повторно пересекаются в точке A' . Аналогично определены точки B', C', D' . Докажите, что если точки A', B', C', D' все различны, то четырехугольник $A'B'C'D'$ подобен $ABCD$.
2. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Пусть точки P, Q симметричны C_1, A_1 относительно BC, AB соответственно. Точка M является серединой отрезка AC . Докажите, что четырехугольник PQB_1M вписанный.
3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка M — середина отрезка A_1C_1 . Окружность (B_1MC_1) повторно пересекает AB в точке P , а окружность (B_1MA_1) повторно пересекает BC в точке Q . Докажите, что описанная окружность треугольника BPQ касается прямой AC .
4. В треугольнике ABC отметили инцентр I , и середину M отрезка BC . Прямая, проходящая через A перпендикулярно BC и прямая, проходящая через M перпендикулярно AI пересекаются в точке K . Докажите, что окружность с диаметром AK касается вписанной окружности треугольника ABC .
5. В треугольнике проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Пусть A_2A_1, B_2B_1 и C_2C_1 — диаметры окружности девяти точек треугольника. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 , пересекаются в одной точке или параллельны.
6. В треугольнике ABC отметили центр A -вневыписанной окружности. Пусть ω — произвольная окружность, проходящая через A и I_a , пересекающая продолжения сторон AB и AC в точках X и Y соответственно. На отрезках I_aB и I_aC отметили точки S и T соответственно так, что $\angle AXI_a = \angle BTI_a$ и $\angle AYI_a = \angle CSTI_a$. Отрезки BT и CS пересекаются в точке K . Отрезки KI_a и TS пересекаются в точке Z . Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.