

Конечные пространства

Для простого числа p определим n -мерное аффинное пространство \mathbb{Z}_p^n над полем \mathbb{Z}_p как множество строк (x_1, x_2, \dots, x_n) из n остатков по модулю p .

Подпространством пространства \mathbb{Z}_p^n назовём множество $\{x + \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_k \cdot e_k \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}_p\}$, где x и e_i — фиксированные точка и фиксированные k линейно независимых векторов пространства \mathbb{Z}_p^n . Число k называется размерностью подпространства.

1. Рассмотрим пространство \mathbb{Z}_p^3 . Любое одномерное подпространство этого пространства будем называть *прямой*, любое двумерное — *плоскостью*.
 - (а) Сколько точек содержит прямая? Сколько точек содержит плоскость?
 - (б) Сколько прямых проходит через данную точку? Сколько плоскостей проходит через данную пару различных точек?
 - (в) Сколько всего прямых и сколько плоскостей есть в пространстве?
2. Компания из 8 ребят играет в Resistance. Каждый игровой раунд какие-то 4 игрока идут в рейд. Какое наименьшее число раундов потребуется, чтобы любая тройка игроков как минимум один раз поучаствовала одним и том же в рейде вместе?
3. (а) Докажите, что на доске 2017×2017 можно отметить 2017 клеток так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не лежали на одной прямой. (б) Докажите, что в кубике $2017 \times 2017 \times 2017$ можно отметить 2017 кубиков так, чтобы центры никаких четырёх отмеченных кубиков не лежали в одной плоскости.
Порисуйте алгебраические кривые с такими же свойствами в вещественном мире.

Проективным пространством $\mathbb{Z}_p P^n$ называют множество все прямых, проходящих через фиксированную точку A пространства \mathbb{Z}_p^{n+1} . Подпространство размерности k проективного пространства $\mathbb{Z}_p P^n$ определено как множество все прямых аффинного пространства \mathbb{Z}_p^{n+1} , проходящих через точку A и лежащих в некотором аффинном подпространстве размерности $k + 1$. \mathbb{Z}_p^{n+1} .

4. (а) Сколько точек содержит проективная плоскость $\mathbb{Z}_p P^2$?
(б) Сколько прямых в проективной плоскости $\mathbb{Z}_p P^2$?
5. Есть список из 31 задачи для зачёта. Каждый студент намерен сдать 6 из этих задач; при этом у любых двух студентов должно быть не более одной сданной ими обоими задачи. Каково наибольшее возможное число студентов?
6. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 57×57 так, чтобы центры никаких четырёх отмеченных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны линиям квадрата?
7. Какое наименьшее количество 7-элементный подмножеств 15-элементного множества можно выбрать так, чтобы любое 3-элементное множество содержалось хотя бы в одном из выбранных?