

Периодичность

Бесконечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ каких-либо объектов называется *периодической*, если существуют такие натуральные числа N и T , что при всех $n \geq N$ выполнено $a_n = a_{n+T}$. Число T называется *периодом* последовательности, а конечная подпоследовательность a_1, a_2, \dots, a_{N-1} — *предпериодом*.

1. Пусть a — некоторое нечётное число. В последовательности $\{u_n\}$ натуральных чисел u_1 задано произвольно, а для остальных элементов выполняется соотношение: $u_{n+1} = u_n/2$, если u_n — чётно и $u_{n+1} = u_n + a$, если u_n — нечётно. Докажите, что последовательность периодична.
2. Дана периодическая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ с периодом T и многочлен с целыми коэффициентами $P(n)$, положительный во всех натуральных точках. Докажите, что последовательность $a_{P(1)}, a_{P(2)}, \dots, a_{P(n)}, \dots$ периодична.
3. Последовательность нулей и единиц строится следующим образом: на k -м месте ставится ноль, если сумма цифр числа k чётна, а иначе (если сумма цифр числа k нечётна) ставится единица. Докажите, что эта последовательность неперіодична.
4. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{n+1} \leq 10a_n$ при всех натуральных n . Докажите, что бесконечная десятичная дробь $0, a_1 a_2 a_3 \dots$, полученная приписыванием этих чисел друг к другу, иррациональна.
5. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горячей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?
6. В числе $a = 0,12457\dots$ n -я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что a — иррациональное число.
7. Все члены бесконечной арифметической прогрессии — натуральные числа. В каждом числе удалось подчеркнуть одну или несколько подряд идущих цифр так, что в первом числе оказалась подчеркнута цифра 1, во втором — цифра 2, ..., в 2020-ом — цифры 2, 0, 2, 0 подряд и т. д. Докажите, что разность прогрессии — это степень числа 10.