

Производящие функции, дополнительные задачи

1. Для целого неотрицательного n найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ таких, что $P(2) = n$.
2. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.
3. Даны два набора натуральных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Некоторые числа в них могут встречаться по несколько раз. Известно, что наборы $A + A = \{a_i + a_j \mid i \neq j\}$ и $B + B = \{b_i + b_j \mid i \neq j\}$ равны, в отличие от исходных наборов A и B (равенство наборов \iff все числа входят в них с одинаковой кратностью). Докажите, что n — степень двойки.