

## Производящие функции, дополнительные задачи

1. Для целого неотрицательного  $n$  найдите количество многочленов  $P(x)$  с коэффициентами из множества  $\{0, 1, 2, 3\}$  таких, что  $P(2) = n$ .
2. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.
3. Даны два набора натуральных чисел  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Некоторые числа в них могут встречаться по несколько раз. Известно, что наборы  $A + A = \{a_i + a_j \mid i \neq j\}$  и  $B + B = \{b_i + b_j \mid i \neq j\}$  равны, в отличие от исходных наборов  $A$  и  $B$  (равенство наборов  $\iff$  все числа входят в них с одинаковой кратностью). Докажите, что  $n$  — степень двойки.