Производящие функции

Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется формальный степенной ряд:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Иногда степенной ряд сходится при всех x, лежащих в некоторой окрестности $(x-\delta, x+\delta)$ точки $x = 0$. В этом случае производящей функцией также называют саму числовую функцию $f\colon (x-\delta, x+\delta) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum a_k x^k$. В задачах данного листочка можно без доказательства пользоваться тем, что операции на рядах (сложение, умножение, почленное дифференцирование) соответствуют одноимённым операциям на числовых функциях.

1. Найдите в замкнутом виде (т. е. без многоточий и знаков суммирования) производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, если при всех $n \geqslant 0$ последовательность a_n задана формулой: **(a)** $a_n = C_m^n$; **(b)** $a_n = n$; **(c)** $a_n = n^2$; **(d)** $a_n = 1/n$.

2. Напишите (в незамкнутом виде, в ответе можно использовать бесконечные произведения) производящие функции следующих последовательностей:
(a) a_k — число способов разбить число k на различные натуральные слагаемые без учета порядка;
(b) b_k — количество способов разбить число k на натуральные слагаемые с учетом порядка;
(c) c_k — количество способов разбить число k на натуральные слагаемые без учета порядка;
(d) d_k — количество способов разбить число k на нечетные натуральные слагаемые без учета порядка.
(e) Докажите, что $a_k = d_k$.

3. На доске в клетке $(0, 0)$ стоит шахматный король, который умеет ходить только в трёх направлениях: вверх, вправо и вправо-вверх. Пусть $a_{(m,n)}$ ($b_{(m,n)}$) — количество траекторий короля, заканчивающихся в (m, n), имеющих чётное (соответственно нечётное) число ходов вправо-вверх.
Для последовательности $c_{m,n}$ с двумя индексами производящая функция зависит от двух переменных и определяется так: $F(x, y) = \sum c_{m,n} x^m y^n$.
(a) Найдите производящую функцию $F(x, y)$ последовательности $a_{(m,n)} + b_{(m,n)}$.
(b) Вычислите явно $a_{(m,n)} - b_{(m,n)}$.

4. Найдите количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, сумма элементов которых делится на **(a)** 4; **(b)** 3.

5. Погода в мае месяце бывает двух типов: хорошая и не очень. Учёные установили две закономерности: 1) 1 мая погода всегда не очень; 2) для $2 \leqslant k \leqslant 31$ погода k-го мая следующего года не очень тогда и только когда, когда в текущем году погода k и $k-1$ мая отличалась. В каком году впервые погода в течение всего мая будет в точности такой же, как в 2007?