

Zoom

1. Андрей и Маша играют в такую игру: вначале Андрей вырезает из отрезка $[0, 1]$ интервал длины $1/2$, затем из оставшихся двух отрезков Маша вырезает интервал длины $1/4$, затем из оставшихся трех отрезков Андрей вырезает интервал длины $1/8$, и т.д. Проигрывает тот, кто не может вырезать свой очередной интервал. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками так, чтобы любые два треугольника замощения были подобны, но не гомотетичны?
3. (IMO-2019.5) The Bank of Bath issues coins with an H on one side and a T on the other. Harry has n of these coins arranged in a line from left to right. He repeatedly performs the following operation: if there are exactly $k > 0$ coins showing H , then he turns over the k th coin from the left; otherwise, all coins show T and he stops. For example, if $n = 3$ the process starting with the configuration THT would be $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, which stops after three operations.

(a) Show that, for each initial configuration, Harry stops after a finite number of operations.

(b) For each initial configuration C , let $L(C)$ be the number of operations before Harry stops. For example, $L(THT) = 3$ and $L(TTT) = 0$. Determine the average value of $L(C)$ over all 2^n possible initial configurations C .

4. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?
5. Существует ли на координатной плоскости бесконечная последовательность точек $P_i = (x_i, y_i)$ с натуральными координатами такая, что для любых индексов $i > j$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$0 < |x_i - x_j| < 10\sqrt{i-j} \quad \text{или} \quad 0 < |y_i - y_j| < 10\sqrt{i-j}?$$