# Задачи по геометрии

1. На сторонах $BC$ и $AD$ вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли такие точки $X$ и $Y$, что $AX$ перпендикулярно биссектрисе угла $CBD$, а $BY$ перпендикулярно биссектрисе угла $CAD$. Докажите, что $XY \parallel CD$.

2. Обозначим за $O$ центр описанной окружности треугольника $ABC$. Прямая $AO$ пересекается со средней линией $A_0C_0$ в точке $P$. Докажите, что угол $C_0PA$ равен углу $A_0PF$, где $AF$ — высота треугольника $BC$.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$. Диагонали этого четырехугольника пересекаются в точке $M$, причем $\angle AMB = 60°$. Точки $K$ и $L$ расположены вне $ABCD$ так, что треугольники $AKD$ и $BLC$ равносторонние. Отрезок $KL$ пересекает $\omega$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $KP = QL$.

4. Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $A_1, B_1$ и $C_1$ соответственно. Обозначим через $P$ повторное пересечение $AA_1$ и вписанной окружности. Докажите, что прямая $B_1P$ проходит через середину $AF$ тогда и только тогда, когда $AC = BC$.

5. Биссектриса $\ell$ угла $A$ треугольника $ABC$ пересекает $BC$ в точке $D$. Прямая $d$ проходит через $D$ перпендикулярно $\ell$. Окружность $\omega$ проходит через точки $B$ и $C$, причем ее центр лежит на $\ell$. $G$ — произвольная точка на окружности $\omega$. Прямая $GA$ пересекает $d$ в точке $R$. Докажите, что $(DGR)$ касается $\omega$.

6. В треугольника $ABC$ ответили середины $M$ и $N$ сторон $AB$ и $AC$ и точку пересечения медиан $G$. Касательные в точках $M$ и $N$ к окружности $(AMN)$ пересекают $BC$ в точках $R$ и $S$ соответственно. Точка $X$ на стороне $BC$ такова, что $\angle CAG = \angle BAX$. Докажите, что прямая $GX$ является радикальной прямой окружностей $(BMS)$ и $(CNR)$.

7. Обозначим через $A_1, B_1, C_1$ основания высот треугольника $ABC$, проведенные через вершины $A, B, C$ соответственно. Точка $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$. Окружности $(ABC)$ и $AOA_1$ повторно пересекаются в точке $P \neq A$. Прямые $PB_1$ и $PC_1$ повторно пересекают $(ABC)$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $XY \parallel BC$.